Online-Prüfungen mit STACK Aufgaben

Gerda Fiedler[1], Birgit Gottschlich-Müller[1], Karin Melcher[1*]

[1]Fachbereich Maschinenbau und Mechatronik, FH Aachen, Goethestraße 1, 52064 Aachen, Deutschland; [*]*melcher@fh-aachen.de*

Kurzfassung. Wir stellen hier exemplarisch STACK Aufgaben vor, die frei von der Problematik sind, welche sich durch diverse Kommunikationswege und (webbasierte) Computer Algebra Systeme (CAS) ergibt. Daher sind sie insbesondere für eine Open-Book Online Prüfung geeignet, da eine faire Prüfungssituation gewährleistet werden kann.

Einleitung

Seit dem WS 2020/21 gibt es im Curriculum aller Bachelorstudiengänge des Fachbereichs Maschinenbau und Mechatronik an der FH Aachen ein neues Modul "Grundlagen der Mathematik für Ingenieure". Dieses findet als zweiwöchiger Blockkurs vor Beginn der regulären Vorlesungszeit statt und ersetzt den zweiten Teil des früher vierwöchigen Mathematik Vorkurses. Der Großteil des Moduls widmet sich der Lösung verschiedener Gleichungstypen sowie den verschiedenen Funktionsklassen. Außerdem gibt es eine kurze Einführung in die Differential- und Integralrechnung und es werden die Ableitungsregeln besprochen. Das Bestehen dieser Klausur ist Voraussetzung zur Anmeldung der Mathematik 1 Klausur nach dem ersten Semester und aller Modulprüfungen ab dem zweiten Semester.

Eigentlich als Präsenzklausur ohne Zulassung von Hilfsmitteln (also weder Taschenrechner noch Formelsammlung) geplant, wurde sie aufgrund der Coronapandemie durch eine Online-Prüfung mit STACK Aufgaben ersetzt. Aus rechtlichen Gründen wurde diese Klausur als Open-Book Prüfung (also ohne Aufsicht) durchgeführt. Ein wichtiger Aspekt bei der Konzeption der Aufgaben war daher, eine faire Prüfungssituation zu gestalten. Aufgaben, bei denen Ableitungen zu bestimmen sind oder Gleichungen gelöst werden müssen, können sehr einfach mittels eines CAS gelöst werden, sind daher für solche Klausuren nur bedingt geeignet. Wir möchten in diesem Artikel einige unserer Konzepte vorstellen, die wir für die Online-Prüfung genutzt haben und einen Ausblick auf geeignete Aufgaben im Bereich der Höheren Mathematik geben.

1 Was sind STACK Aufgaben?

STACK steht für "System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel" – ein webbasiertes, open-source Plugin, das direkt in Online-Tests in ILIAS bzw. Moodle eingebunden werden kann. STACK Aufgaben lassen sich sehr einfach randomisieren und durch die Einbindung von Maxima können Eingaben direkt symbolisch nachgerechnet und Folgefehler gut nachvollzogen werden. [1]

2 Der Weg ist das Ziel

Bei schriftlichen Mathematikklausuren ist im allgemeinen der Lösungsweg von größerer Bedeutung als das reine Endergebnis. Mathematische Online Aufgaben, die nur ein Endergebnis abfragen, sind zwar meist sehr einfach zu realisieren, können aber die Kompetenz "Lösungsstrategie"nicht überprüfen. Daher bietet es sich an, Online Aufgaben zu konzipieren, wo auch Zwischenschritte angegeben werden müssen. Diese haben den weiteren großen Vorteil, dass oft auch Folgefehler berücksichtigt werden können.

Soll bei der Lösung von Gleichungen (oder Ungleichungen) nicht nur die Lösungsmenge angegeben werden, kann als Zwischenschritt beispielsweise auch nach äquivalenten Darstellungen der ursprünglichen Gleichung gefragt werden. Im Beispiel einer Logarithmusgleichung $\ln(a(x-b)^2) = c$ (vgl. Abbildung 1), wobei a, b und c randomisiert sind, gibt es verschiedene Wege diese nach x aufzulösen, je nachdem welches Logarithmusgesetz anwendet wird. Zusätzlich ist dabei stets auf den Definitionsbereich zu achten. Hier sind drei der sechs angegebenen Gleichungen äquivalent zur Ausgangsgleichung. Neben dem reinen Lösen der Logarithmusgleichung müssen die Studierenden hier auch zeigen, dass sie erkennen können, welche drei der sechs angegebenen Gleichungen tatsächlich äquivalent sind.

Gegeben sei die Gleichung

$$\ln\left(4\,(x-5)^2\right) = 2.$$

Zu welcher der folgenden Gleichungen ist sie äquivalent?

(1) $\ln\left((x-5)^2\right) = 2 - 2\,\ln(2)$ (4) $(x-5)^2 = \frac{1}{4}\,e^2,\ \ x \neq 5$

(2) $\ln(x-5) = \dfrac{2-2\,\ln(2)}{2}$ (5) $(x-5)^2 = e^{2-2\,\ln(2)},\ \ x > 5$

(3) $\ln(x-5) = \sqrt{2-2\,\ln(2)}$ (6) $|x-5| = e^{1-\ln(2)},\ \ x \neq 5$

Geben Sie Ihre Auswahl als Menge $\{nr_1, nr_2, \ldots,\}$ ein.

Auswahl:

Geben Sie nun die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung in der Form $\{x_1, x_2, \ldots,\}$ ein.

$\mathbb{L} =$

Abbildung 1: STACK Aufgabe: Logarithmusgleichung I.

Eine andere Möglichkeit, bei der auch Folgefehler berücksichtigt werden können, zeigt folgende Logarithmusgleichung (vgl. Abbildung 2). Ziel dieser Aufgabe ist es eine Logarithmusgleichung der Form

$$\ln(x-a) + \ln(bx-a) = 2\ln(x+a)$$

zu lösen, wobei a und b randomisiert sind. Nach der Bestimmung des Definitionsbereiches führt die Anwendung der Exponentialfunktion auf eine quadratische Gleichung, deren Koeffizienten angegeben werden müssen. So können in der Lösungsmenge etwaige Rechenfehler bei der Umformung berücksichtigt werden.

Zu lösen ist die Gleichung $\ln(x-5) + \ln(2\,x-5) = 2\ln(x+5)$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Gleichung.
Geben Sie zunächst die Nummer für die Form von $\mathbb{D}$ und dann einen Wert für a ein.
(1) $\mathbb{D} = (-\infty, a)$ **(2)** $\mathbb{D} = (-\infty, a]$ **(3)** $\mathbb{D} = (a, \infty)$ **(4)** $\mathbb{D} = [a, \infty)$
Form Nr. $a =$

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + bx + c = 0$ an, die auf $\mathbb{D}$ äquivalent zur gegebenen Gleichung ist. Geben Sie die Parameter b und c ein.
$b =$ $c =$

c) Geben Sie schließlich die Lösungen der ursprünglichen Logarithmusgleichung als Menge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ an.
$\mathbb{L} =$

Abbildung 2: STACK Aufgabe: Logarithmusgleichung II.

Bei Grenzwertaufgaben in der Höheren Mathematik liegt ein Schwerpunkt in den Termumformungen, die es erlauben Grenzwertsätze anzuwenden. Abbildung 3 zeigt das klassische Beispiel einer Folge, die so umgeformt werden kann, dass als Grenzwert die Eulersche Zahl vorkommt. Randomisiert wird in diesem Fall nur der Faktor von n im Exponenten, der sowohl positiv als auch negativ sein kann, aber ungleich -1, 0 und 1 ist.

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folge, falls er existiert

$$a_n = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{6\,n}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Wandeln Sie zunächst das Folgenglied a_n so in die Form $\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\right)^k \cdot b_n$ um, dass die Grenzwertsätze direkt anwendbar sind.
$m =$ $k =$ $b_n =$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert (falls er existiert)
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$

c) Bestimmen Sie schließlich den Grenzwert (falls er existiert)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

Hinweis: Falls ein Grenzwert nicht existiert, geben Sie bitte **inf** ein.

Abbildung 3: STACK Aufgabe: Grenzwertbestimmung.

Bei der nächsten Aufgabe (vgl. Abbildung 4) handelt es sich um ein Integral, das mittels Substitution lösbar ist. Es soll die Stammfunktion von $f(x) = \frac{bx}{\sqrt{1+ax^2}}$ ermittelt werden, wobei a und b randomisiert sind. Als Zwischenschritte müssen als erstes die gewählte Substitution angegeben werden, danach der daraus resultierende Integrand sowie dessen Stammfunktion.

Gegeben sei die Funktion $f:\ \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{9\,x}{\sqrt{6\,x^2+1}}$.

Bestimmen Sie eine Stammfunktion F mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) Ersetzen Sie zunächst einen Teil des Integranden durch eine neue Integrationsvariable z
$z(x) =$

b) Die Substitution aus a) führt zu dem Integral $\int g(z)\,dz$ mit
$g(z) =$
Bestimmen Sie eine Stammfunktion von g.
$G(z) =$

c) Geben Sie schließlich eine gesuchte Stammfunktion von f an.
$F(x) =$

Abbildung 4: STACK Aufgabe: Stammfunktion mittels Substitutionsmetheode ermitteln.

3 Rückwärts formuliert und mit Parametern gewürzt

Mittels "rückwärts" formulierter Aufgaben und/oder durch den Einsatz von Parametern ist die (direkte) Nutzung von Online-Tools schwierig. Abbildung 5 zeigt das Beispiel einer Bruchgleichung mit einem Parameter p

sowie einem linearen Zähler- und Nennerterm, deren Koeffizienten randomisiert werden. Bestimmt werden soll die Definitionsmenge, die Lösung x in Abhängigkeit von p sowie der Wert des Parameters p, bei der die Gleichung nicht lösbar ist.

Für $x \in \mathbb{R} \setminus M$ ist die Gleichung

$$\frac{p - 2\,x}{5\,x + 2} = -1$$

mit dem Parameter $p \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Menge M der Definitionslücken.

$M =$

b) Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung in Abhängigkeit von p.

$x =$

c) Für welchen Parameter p hat die Gleichung keine Lösung?

$p =$

Abbildung 5: STACK Aufgabe: Bruchgleichung mit Parameter.

In der folgenden Aufgabe (vgl. Abbildung 6) ist eine Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{p_s(x)}$ samt maximalem Defintionsbereich gegeben, wobei p_s eine konkave quadratische Funktion in Abhängigkeit eines Parameters s ist. Der Parameter s soll so bestimmt werden, dass der Definitionsbereich dem vorgegebenen Definitonsbereich entspricht. Statt der Wurzelfunktion kann auch die Logarithmusfunktion verwendet werden, sofern aus dem abgeschlossenen ein offenes maximales Definitionsintervall wird.

Für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ hat die Funktion

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + (2 - 3\,s)\,x - 2\,s^2 + 3\,s - 1}$$

den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D} = [-3,\,-1]$?

$s \in$

Abbildung 6: STACK Aufgabe: Definitionsbereich mit Parameter.

In der folgenden Aufgabe (vgl. Abbildung 7) sollen die Parameter b und c einer trigonometrischen Gleichung so bestimmt werden, dass sie auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ genau eine Lösung besitzt. Randomisiert wird in diesem Fall nur der Vorfaktor von $\sin^2(x)$.

Für welche Parameterwerte $b, c \in \mathbb{R}$ hat die folgende Gleichung im Intervall $[0, 2\pi)$ genau eine Lösung?

$$\frac{7}{2}\sin^2(x) = b\,\cos(x) + c$$

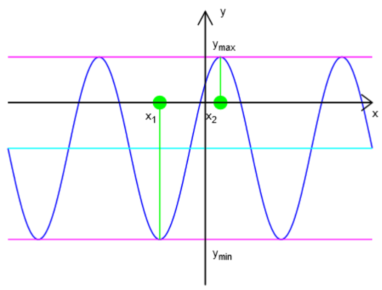
$b =$ $c =$

Abbildung 7: STACK Aufgabe: Trigonometrische Gleichung mit Parameter

4 Vom Graph zur Funktion

In diesem Aufgabentyp wird ein (randomisierter) Graph einer Funktion angezeigt und die Prüfungsteilnehmer müssen entweder die Funktionsgleichung angeben, die Parameter einer gegebenen Funktionsgleichung anpassen oder den Typ der Funktionsgleichung erkennen. In Abbildung 8 sieht man das Beispiel einer allgemeinen Cosinus Funktion $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi) + y_0$, von der zwei Extremstellen in beliebiger Kombination aus Maxima und Minima sowie minimaler und maximaler Funktionswerte, jeweils randomisiert, bekannt sind und die Parameter A, ω, φ sowie y_0 bestimmt werden müssen.

Gegeben ist eine periodische Funktion mit der Darstellung $f(x) = A\,\cos(\omega\,x + \varphi) + y_0$:



Dabei sind gemäß der Abbildung

- $x_1 = -3\,\pi$ und $x_2 = \pi$ zwei ausgewählte Extremstellen sowie
- $y_{min} = -3$ und $y_{max} = 1$ die beiden absoluten Extremwerte von f.

Bestimmen Sie **einen Satz** von zueinander passenden Parametern A, ω, φ, y_0.

$A =$ $\omega =$

$\varphi =$ $y_0 =$

Abbildung 8: STACK Aufgabe: Allgemeine Cosinusfunktion.

In der folgenden Aufgabe (vgl. Abbildung 9) sind jeweils die Graphen zweier linear transformierter Exponential- und/oder Logarithmusfunktionen (ohne Stauchung bzw. Streckung) sowie neun Funktionsvorschriften vorgegeben. Jedem Graphen ist die richtige Funktionsvorschrift zuzuordnen. Die Verschiebung in x- beziehungsweise y-Richtung ist jeweils betragsmäßig gleich randomisiert, zusätzlich kann die Funktion noch an beiden Achsen gespiegelt werden.

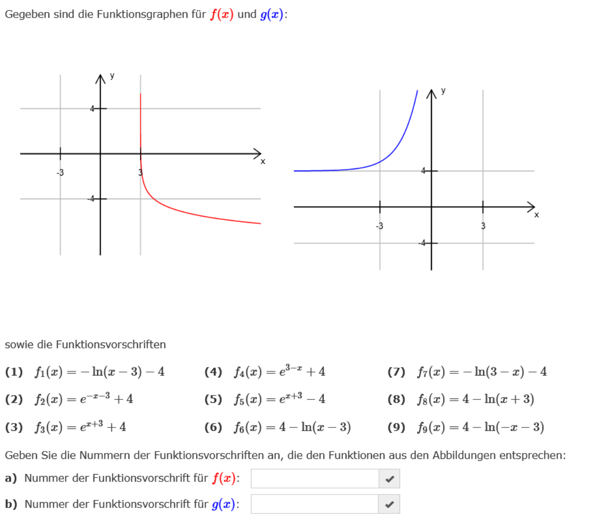


Abbildung 9: STACK Aufgabe: Exponential- und Logarithmusfunktion.

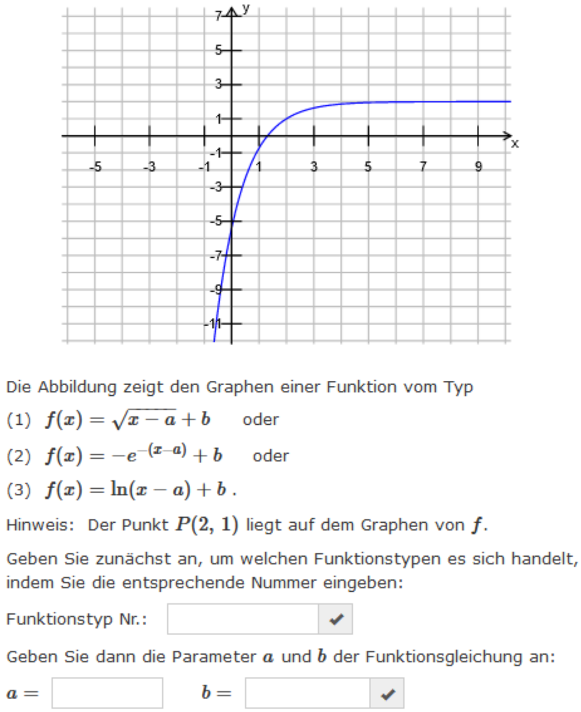


Abbildung 10: STACK Aufgabe: Funktionstyp und Transformation erkennen.

In der nächsten Aufgabe (vgl. Abbildung 10) soll als erstes erkannt werden, von welchem Funktionstyp (Wurzel-, Exponential-, oder Logarithmusfunktion) der dargestellte Graph ist. Dargestellt wird eine zufällig ausgewählte Funktion der Form $f(x) = \sqrt{x-a} + b$, $f(x) = -e^{-x+a} + b$ oder $f(x) = \ln(x-a) + b$, wobei a und b randomisiert werden. Danach sollen auch noch die Parameter a und b der ausgewählten Funktion bestimmt werden. Als Hinweis wird noch ein konkreter Punkt des Graphen angegeben.

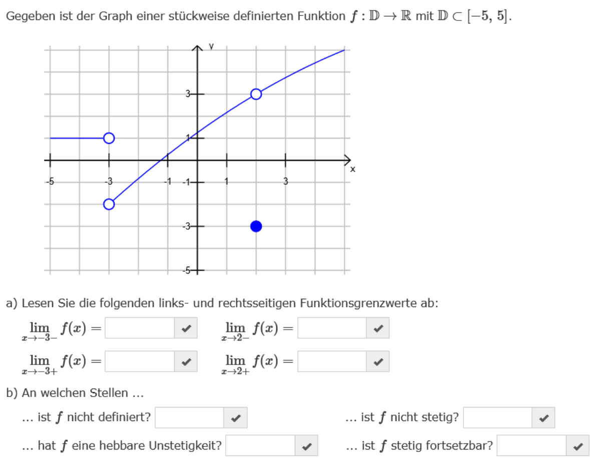
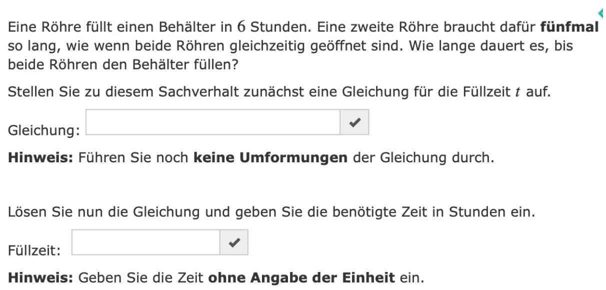


Abbildung 11: STACK Aufgabe: einseitige Funktionsgrenzwerte.

In Abbildung 11 sieht man ein Beispiel aus dem Bereich der Höheren Mathematik zum Thema (einseitiger) Funktionsgrenzwert. Es werden jeweils zwei Stellen randomisiert, eine ist immer eine Sprungstelle (entweder als Definitionslücke oder Unstetigkeitsstelle). Von diesen Stellen sind jeweils die einseitigen Funktionsgrenzwerte zu bestimmen. Zusätzlich soll der Typ dieser Stelle angegeben werden.

5 Vom Text zur Gleichung

Da bei Textaufgaben die größte Schwierigkeit meist im Aufstellen der notwendigen Ansatz-Gleichung (bzw. Gleichungen) liegt, eignen sich diese besonders gut für eine Online-Prüfung. Fordert man zusätzlich noch die Eingabe der zugrunde liegenden Gleichung, kann einerseits das Äusprobieren"verhindert werden. Andererseits kann ein Fehler im Endergebnis, der aus einer fehlerhaften Gleichung resultiert, als Folgefehler erkannt werden. Durch die Randomisierung der zur Berechnung notwendigen Größen wird außerdem die Kommunikation der Studierenden untereinander erschwert. Die Herausforderung bei solchen Textaufgaben liegt in der Überprüfung der einzugebenden Gleichung, da verschiedenste Möglichkeiten berücksichtigt werden sollten. Im klassischen Füllmengenproblem (vgl. Abbildung 12) sind sowohl die benötigte Füllzeit der einen Röhre sowie das Vielfache der benötigten Zeit der anderen Röhre im Vergleich zum gemeinsamen Betrieb (jeweils randomisiert) vorgegeben.


Eine Röhre füllt einen Behälter in 6 Stunden. Eine zweite Röhre braucht dafür **fünfmal** so lang, wie wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind. Wie lange dauert es, bis beide Röhren den Behälter füllen?

Stellen Sie zu diesem Sachverhalt zunächst eine Gleichung für die Füllzeit t auf.

Gleichung:

Hinweis: Führen Sie noch **keine Umformungen** der Gleichung durch.

Lösen Sie nun die Gleichung und geben Sie die benötigte Zeit in Stunden ein.

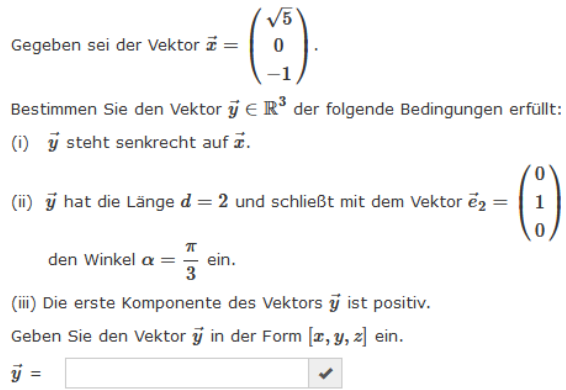
Füllzeit:

Hinweis: Geben Sie die Zeit **ohne Angabe der Einheit** ein.

Abbildung 12: STACK Textaufgabe.

Die folgende Aufgabe (vgl. Abbildung 13) stammt aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Zu einem gegebenen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$ wird ein zweiter Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ mit positiver erster Komponente und vorgegebener Länge d gesucht, der senkrecht auf $\vec{x}$ steht und mit dem zweiten Einheitsvektor einen vorgegebenen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ einschließt. Randomisiert werden dabei a, b und d.

In der nächsten Aufgabe (vgl. Abbildung 14) ist eine Extremwertaufgabe mit mehreren reellen Variablen zu lösen. Minimiert werden soll die Oberfläche eines quaderförmigen, oben offenen Behälters bei gegebenem Volumen, welches randomisiert ist. Zuerst müssen die Formeln zur Bestimmung der Oberfläche (Hauptbedingung) und des Volumens (Nebenbedingung) angegeben werden, danach die zu minimierende Funktion und der Wert der optimalen Seitenlängen. Durch diese Formulierung können Folgefehler berücksichtigt werden.


Gegeben sei der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ der folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$.

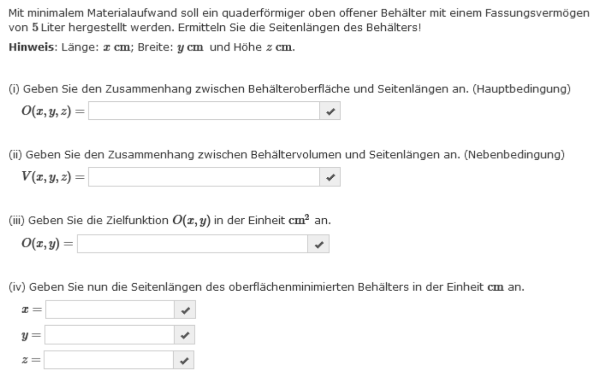
(ii) $\vec{y}$ hat die Länge $d = 2$ und schließt mit dem Vektor $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ein.

(iii) Die erste Komponente des Vektors $\vec{y}$ ist positiv.

Geben Sie den Vektor $\vec{y}$ in der Form $[x, y, z]$ ein.

$\vec{y}$ =

Abbildung 13: STACK Aufgabe zur Analytischen Geometrie.


Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 5 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Behälters!

Hinweis: Länge: x cm; Breite: y cm und Höhe z cm.

(i) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Behälteroberfläche und Seitenlängen an. (Hauptbedingung)

$O(x, y, z) =$

(ii) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Behältervolumen und Seitenlängen an. (Nebenbedingung)

$V(x, y, z) =$

(iii) Geben Sie die Zielfunktion $O(x, y)$ in der Einheit cm^2 an.

$O(x, y) =$

(iv) Geben Sie nun die Seitenlängen des oberflächenminimierten Behälters in der Einheit cm an.

$x =$

$y =$

$z =$

Abbildung 14: STACK Extremwert Aufgabe im $\mathbb{R}^2$ mit Nebenbedingung.

6 Zusammenfassung

In diesem Artikel haben wir vier Typen von STACK Aufgaben vorgestellt, die für eine Open-Book Online-Prüfung im Bereich der Grundlagenmathematik konzipiert wurden und eine faire Prüfungssituation gewährleisten. Die dahinter liegenden Ansätze können, wie wir exemplarisch gezeigt haben, ohne weiteres auch für Aufgaben im Bereich der Höheren Mathematik angewendet werden. Darüber hinaus ist eine Übertragung der Konzepte auf andere Online-Prüfungssysteme möglich.

Danksagung

Eine umfangreiche Sammlung an STACK Aufgaben findet sich in "DOMAIN - Datenbank für digitale Mathematik-Aufgaben" [2].

Literatur

[1] *Philosophy of STACK*. Link

[2] AK MATHE-DIGITAL, *DOMAIN - Datenbank für digitale Mathematik-Aufgaben*. http://db.ak-mathe-digital.de