Online-Prüfungen mit STACK Aufgaben

Prof. Dr. Karin Melcher

FH Aachen

12. März 2021

Gliederung

- STACK am Fachbereich Maschinenbau und Mechatronik
- Vier Typen von geeigneten Prüfungsaufgaben
  - Der Weg ist das Ziel
  - Rückwärts formuliert und mit Parametern gewürzt
  - Vom Graph zur Funktion
  - Vom Text zur Gleichung

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Was ist STACK?

- **S**ystem for **T**eaching and **A**ssessment using a **C**omputer algebra **K**ernel
- Webbasiertes, open-source ILIAS (Moodle) Plugin
- Eingaben können direkt symbolisch nachgerechnet werden
- Folgefehler können gut nachverfolgt werden
- Einfach zu randomisieren

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

STACK am FB Maschinenbau und Mechatronik

- Im WS 2019/20 Umstellung der verpflichtenden Hausaufgaben in Mathematik 1 auf STACK Aufgaben
- Im SS 2020 zusätzliche STACK Übungsaufgaben (freiwillig) in Mathematik 2
- Im November 2020 erste Online-Prüfung (pandemiebedingt) mit STACK Aufgaben im Modul "Grundlagen der Mathematik"

Grundlagen der Mathematik für Ingenieure

- Neues Modul im Curriculum aller Bachelorstudiengänge
- Zweiwöchiger Blockkurs vor Beginn der regulären Vorlesungszeit
- Ersetzt den zweiten Teil des Mathematik Vorkurses
- Voraussetzung für die Zulassung zur Mathematik 1 Klausur und aller Klausuren ab dem zweiten Semester
- Themen:
  - Lösung diverser Gleichungstypen
  - Funktionen
  - Kurze Einführung in die Differential- und Integralrechnung
  - Ableitungsregeln
- Pandemiebedingt Online-Prüfung: Wie kann eine faire Prüfungssituation gewährleistet werden?

Der Weg ist das Ziel

- i. A. Lösungsweg von größerer Bedeutung als Endergebnis
- Abfrage von Zwischenschritten

  $\rightarrow$ Folgefehler können berücksichtigt werden

  $\rightarrow$ Onlinerechner nicht direkt nutzbar

Logarithmusgleichung: $\ln(a(x-b)^2) = c$

Gegeben sei die Gleichung

$$\ln\left(4\,(x-5)^2\right) = 2.$$

Zu welcher der folgenden Gleichungen ist sie äquivalent?

(1)	$\ln\left((x-5)^2\right) = 2 - 2\,\ln(2)$	(4)	$(x-5)^2 = \frac{1}{4}\,e^2, \quad x \neq 5$
(2)	$\ln(x-5) = \dfrac{2-2\,\ln(2)}{2}$	(5)	$(x-5)^2 = e^{2-2\,\ln(2)}, \quad x > 5$
(3)	$\ln(x-5) = \sqrt{2-2\,\ln(2)}$	(6)	$\lvert x-5\rvert = e^{1-\ln(2)}, \quad x \neq 5$

Geben Sie Ihre Auswahl als Menge $\{nr_1, nr_2, .., \}$ ein.

Auswahl:

Geben Sie nun die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung in der Form $\{x_1, x_2, .., \}$ ein.

$\mathbb{L} =$

- Lösung & alle möglichen äquivalenten Gleichungen
- Randomisiert sind a, b und c

Logarithmusgleichung: $\ln(x-a)+\ln(bx-a)=2\ln(x+a)$

Zu lösen ist die Gleichung $\ln(x-5)+\ln(2x-5)=2\ln(x+5)$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Gleichung.

Geben Sie zunächst die Nummer für die Form von $\mathbb{D}$ und dann einen Wert für a ein.

(1) $\mathbb{D}=(-\infty,a)$ **(2)** $\mathbb{D}=(-\infty,a]$ **(3)** $\mathbb{D}=(a,\infty)$ **(4)** $\mathbb{D}=[a,\infty)$

Form Nr. $a=$

b) Geben Sie eine quadratische Gleichung der Form $x^2+bx+c=0$ an, die auf $\mathbb{D}$ äquivalent zur gegebenen Gleichung ist. Geben Sie die Parameter b und c ein.

$b=$ $c=$

c) Geben Sie schließlich die Lösungen der ursprünglichen Logarithmusgleichung als Menge $\{x_1,x_2,\ldots\}$ an.

$\mathbb{L}=$

- Defintionsmenge & Koeffizienten der äquivalenten quadratischen Gleichung & Lösung
- Folgefehler können berücksichtigt werden
- Randomisiert sind a und b

Grenzwertbestimmung

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folge, falls er existiert

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{6\,n}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Wandeln Sie zunächst das Folgenglied a_n so in die Form $\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\right)^k \cdot b_n$ um, dass die Grenzwertsätze direkt anwendbar sind.

$m =$ ✔ $\quad k =$ ✔ $\quad b_n =$ ✔

b) Bestimmen Sie den Grenzwert (falls er existiert)

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$ ✔

c) Bestimmen Sie schließlich den Grenzwert (falls er existiert)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ✔

Hinweis: Falls ein Grenzwert nicht existiert, geben Sie bitte **inf** ein.

- Termumformung, bis Grenzwertsätze direkt anwendbar sind
- Folgefehler können berücksichtigt werden
- Randomisiert ist Faktor von n im Exponenten

Stammfunktion von $f(x) = \frac{bx}{\sqrt{1+ax^2}}$

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{9\,x}{\sqrt{6\,x^2+1}}$.

Bestimmen Sie eine Stammfunktion F mit Hilfe der Substitutionsmethode.

a) Ersetzen Sie zunächst einen Teil des Integranden durch eine neue Integrationsvariable z

$z(x) =$

b) Die Substitution aus a) führt zu dem Integral $\int g(z)\,dz$ mit

$g(z) =$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von g.

$G(z) =$

c) Geben Sie schließlich eine gesuchte Stammfunktion von f an.

$F(x) =$

- Substitutionsmethode mit Zwischenschritten
- Folgefehler können berücksichtigt werden

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Rückwärts formuliert und mit Parametern gewürzt

Bruchgleichung mit Parameter

Für $x \in \mathbb{R} \setminus M$ ist die Gleichung

$$\frac{p-2\,x}{5\,x+2} = -1$$

mit dem Parameter $p \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Menge M der Definitionslücken.

$M =$

b) Bestimmen Sie die Lösung x der Gleichung in Abhängigkeit von p.

$x =$

c) Für welchen Parameter p hat die Gleichung keine Lösung?

$p =$

Rückwärts formuliert und mit Parametern gewürzt

Definitionsbereich mit Parameter

Für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ hat die Funktion

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + (2 - 3\,s)\;x - 2\,s^2 + 3\,s - 1}$$

den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D} = [-3,\,-1]$?

$s \in$ ☐ ✔

Rückwärts formuliert und mit Parametern gewürzt

Trigonometrische Gleichung mit Parameter

Für welche Parameterwerte $b, c \in \mathbb{R}$ hat die folgende Gleichung im Intervall $[0, 2\pi)$ genau eine Lösung?

$$\frac{7}{2}\sin^2(x) = b\cos(x) + c$$

$b =$ ___ $c =$ ___

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

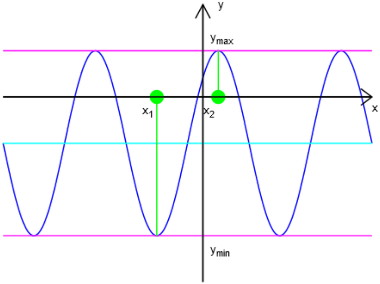
Vom Graph zur Funktion

- Anzeige eines (randomisierten) Graphen einer Funktion
- Eingabe
  - $\rightarrow$ der zugehörigen Funktionsgleichung
  - $\rightarrow$ der passenden Parameter einer gegebenen Funktionsgleichung
  - $\rightarrow$ des Typs der Funktionsgleichung

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Allgemeine Cosinusfunktion

Gegeben ist eine periodische Funktion mit der Darstellung $f(x) = A\,\cos(\omega\,x + \varphi) + y_0$:



Dabei sind gemäß der Abbildung

- $x_1 = -3\,\pi$ und $x_2 = \pi$ zwei ausgewählte Extremstellen sowie
- $y_{min} = -3$ und $y_{max} = 1$ die beiden absoluten Extremwerte von f.

Bestimmen Sie **einen Satz** von zueinander passenden Parametern A, ω, φ, y_0.

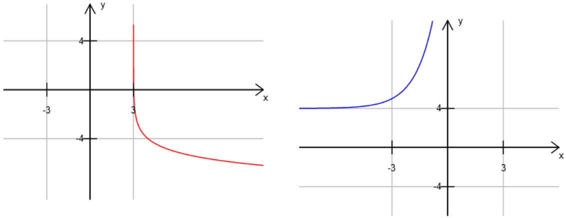
$A =$ ✔ $\omega =$ ✔

$\varphi =$ ✔ $y_0 =$ ✔

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Exponential- und Logarithmusfunktion

Gegeben sind die Funktionsgraphen für $f(x)$ und $g(x)$:



sowie die Funktionsvorschriften

(1) $f_1(x) = -\ln(x-3) - 4$	**(4)** $f_4(x) = e^{3-x} + 4$	**(7)** $f_7(x) = -\ln(3-x) - 4$
(2) $f_2(x) = e^{-x-3} + 4$	**(5)** $f_5(x) = e^{x+3} - 4$	**(8)** $f_8(x) = 4 - \ln(x+3)$
(3) $f_3(x) = e^{x+3} + 4$	**(6)** $f_6(x) = 4 - \ln(x-3)$	**(9)** $f_9(x) = 4 - \ln(-x-3)$

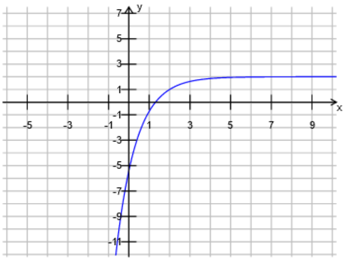
Geben Sie die Nummern der Funktionsvorschriften an, die den Funktionen aus den Abbildungen entsprechen:

a) Nummer der Funktionsvorschrift für $f(x)$: ✔

b) Nummer der Funktionsvorschrift für $g(x)$: ✔

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Funktionstyp und Transformation erkennen



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion vom Typ

(1) $f(x) = \sqrt{x-a} + b$ oder

(2) $f(x) = -e^{-(x-a)} + b$ oder

(3) $f(x) = \ln(x-a) + b$.

Hinweis: Der Punkt $P(2, 1)$ liegt auf dem Graphen von f.

Geben Sie zunächst an, um welchen Funktionstypen es sich handelt, indem Sie die entsprechende Nummer eingeben:

Funktionstyp Nr.: [ ] ✔

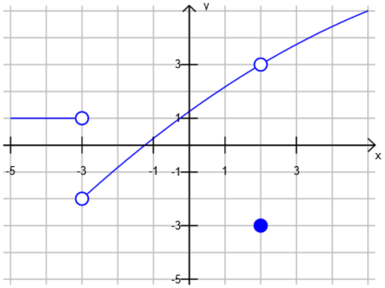
Geben Sie dann die Parameter a und b der Funktionsgleichung an:

$a =$ [ ] $b =$ [ ] ✔

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Einseitige Funktionsgrenzwerte

Gegeben ist der Graph einer stückweise definierten Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} \subset [-5, 5]$.



a) Lesen Sie die folgenden links- und rechtsseitigen Funktionsgrenzwerte ab:

$\lim\limits_{x \to -3-} f(x) =$ ✔ $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) =$ ✔

$\lim\limits_{x \to -3+} f(x) =$ ✔ $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) =$ ✔

b) An welchen Stellen ...

... ist f nicht definiert? ✔ ... ist f nicht stetig? ✔

... hat f eine hebbare Unstetigkeit? ✔ ... ist f stetig fortsetzbar? ✔

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vom Text zur Gleichung

- Aufstellen von Gleichungen wird oft als schwierig empfunden
- Abfrage der Gleichung
  - $\rightarrow$ Folgefehler können verfolgt werden
  - $\rightarrow$ Verhindert das Erraten der Lösung
  - $\rightarrow$ Herausforderung: verschiedene Möglichkeiten der Eingabe sollten berücksichtigt werden
- Steckbriefaufgaben

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Textaufgabe

Eine Röhre füllt einen Behälter in 6 Stunden. Eine zweite Röhre braucht dafür **fünfmal** so lang, wie wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind. Wie lange dauert es, bis beide Röhren den Behälter füllen?

Stellen Sie zu diesem Sachverhalt zunächst eine Gleichung für die Füllzeit t auf.

Gleichung: ✔

Hinweis: Führen Sie noch **keine Umformungen** der Gleichung durch.

Lösen Sie nun die Gleichung und geben Sie die benötigte Zeit in Stunden ein.

Füllzeit: ✔

Hinweis: Geben Sie die Zeit **ohne Angabe der Einheit** ein.

Analytische Geometrie

Gegeben sei der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ der folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$.

(ii) $\vec{y}$ hat die Länge $d = 2$ und schließt mit dem Vektor $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ein.

(iii) Die erste Komponente des Vektors $\vec{y}$ ist positiv.

Geben Sie den Vektor $\vec{y}$ in der Form $[x, y, z]$ ein.

$\vec{y}$ =

Extremwert-Aufgabe im $\mathbb{R}^2$ mit Nebenbedingung

Mit minimalem Materialaufwand soll ein quaderförmiger oben offener Behälter mit einem Fassungsvermögen von 5 Liter hergestellt werden. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Behälters!

Hinweis: Länge: x cm; Breite: y cm und Höhe z cm.

(i) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Behälteroberfläche und Seitenlängen an. (Hauptbedingung)

$O(x, y, z) =$ ✔

(ii) Geben Sie den Zusammenhang zwischen Behältervolumen und Seitenlängen an. (Nebenbedingung)

$V(x, y, z) =$ ✔

(iii) Geben Sie die Zielfunktion $O(x, y)$ in der Einheit cm^2 an.

$O(x, y) =$ ✔

(iv) Geben Sie nun die Seitenlängen des oberflächenminimierten Behälters in der Einheit cm an.

$x =$ ✔

$y =$ ✔

$z =$ ✔

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!